



XXXIII JORNADAS SUDAMERICANAS
DE INGENIERIA ESTRUCTURAL
Santiago, 26 al 30 de Mayo de 2008



www.asaae.org.br

APLICACIÓN DE METODOS PROBABILÍSTICOS DE NIVEL II Y DE NIVEL III (SIMULACIONES DE MONTE CARLO) A LA ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADES CONDICIONALES DE FALLO DE PRESAS DE HORMIGÓN DE GRAVEDAD

ASSESSMENT OF THE CONDITIONAL PROBABILITY OF FAILURE OF CONCRETE GRAVITY DAMS USING PROBABILISTIC ANALYSIS METHODS OF LEVEL II AND LEVEL III (MONTE CARLO SIMULATIONS)

Luis Altarejos García (1); Ignacio Escuder Bueno (2); Armando Serrano Lombillo (3) y Manuel Gómez de Membrillera Ortuño (4)

- (1) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia
- (2) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia
- (3) Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Valencia
- (4) Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de Castilla La Mancha

Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera S/N. 46022 VALENCIA. SPAIN.

Resumen

Las teorías de la fiabilidad estructural, conocidas y aplicadas con éxito desde hace tiempo en diversos campos de la ingeniería civil, han tenido hasta la fecha una relativamente escasa incidencia en el campo de la seguridad de presas, donde tradicionalmente se han venido empleando los métodos clásicos basados en los coeficientes de seguridad. El desarrollo de las técnicas de análisis de riesgos y su aplicación al campo de las presas está propiciando una evolución en el enfoque de la seguridad de presas. La necesidad de evaluar la probabilidad de fallo de la presa como dato necesario para alimentar el proceso del análisis de riesgos supone tener que recurrir, entre otros, a los métodos probabilísticos de análisis ante la insuficiente capacidad de respuesta que ofrecen los métodos clásicos. En este contexto se presenta la aplicación a una presa de hormigón de gravedad de diversos métodos probabilísticos de Nivel II y un método de Nivel III (simulaciones de Monte Carlo), sobre un sencillo modelo base de comportamiento de equilibrio límite.

Palabras Clave: Presas de hormigón, análisis de riesgos, probabilidad de fallo, método de montecarlo.

Abstract

Structural reliability theory has been successfully applied to several fields of structural engineering for a long time. In dam safety, however, most of the analyses are still carried out by means of a classical approach based on safety factors. The development of risk analysis techniques and its application to dam safety evaluation requires the assessment of the probability of failure, which is an input into the overall risk analysis process. As long as classical methods are not useful tools for this purpose, it becomes necessary to turn to probabilistic analysis methods. In this context, herein is presented an application of Level II and Level III (Monte Carlo simulations) probability analysis methods to assess the conditional probability of sliding failure along the dam-foundation contact of a concrete gravity dam, based on a simple limit equilibrium model

Keywords: Concrete dams, risk analysis, probability of failure, Monte Carlo method.

1 INTRODUCCIÓN A LA EVALUACIÓN DE SEGURIDAD DE PRESAS

En el contexto de la evaluación de la seguridad de presas se entiende por **Nivel de seguridad** al margen que separa las condiciones reales de la presa y su embalse de aquellas que provocarían su fallo. Se denomina **situación de fallo** aquella en la que la presa deja de cumplir de forma satisfactoria con alguno de los requisitos para los que ha sido concebida. La zona de frontera que separa la región de seguridad de la región de fallo se denomina **estado límite**. El estudio de estos modos de fallo se realiza a menudo mediante modelos matemáticos parciales, esto es, modelos que analizan uno sólo de estos fenómenos, considerado como aislado e independiente de los demás. Mediante estos modelos, se puede obtener información sobre la seguridad de la presa, relativa al modo o modos de fallo analizados, pero de forma independiente del resto. Un ejemplo lo constituye la comprobación a deslizamiento en el contacto presa-cimiento de una presa de gravedad mediante un modelo matemático de equilibrio de fuerzas en el plano de contacto. Un modelo de este tipo no evalúa los niveles tensionales en la presa y en el cimiento, que deben ser estudiados mediante otro modelo diferente. Bajo la acción de las diferentes sollicitaciones actuantes el conjunto presa-cimiento debe ser resistente, y para ello las tensiones deben ser admisibles tanto en la presa como en el cimiento, y cada porción del conjunto debe ser estable. Esta estabilidad se traduce en las siguientes condiciones:

- Estabilidad al deslizamiento sobre cualquier posible superficie de rotura cinemáticamente compatible.
- La estructura debe, para condiciones normales de carga, trabajar en compresión en todos sus puntos, para evitar el agrietamiento y aparición de presiones intersticiales.
- Las tensiones transmitidas al cimiento deben ser compatibles con las características resistentes del terreno, no provocando roturas ni deformaciones excesivas.

2 MÉTODOS DE EVALUACIÓN DE LA SEGURIDAD DE PRESAS

2.1 Clasificación.

Los métodos de evaluación de seguridad de presas pueden clasificarse como: deterministas (o clásicos), estadísticos, adaptativos y probabilísticos. Las principales características de cada uno de ellos se resumen a continuación:

Métodos deterministas: están basados en leyes físicas y principios generales de la mecánica (resistencia de materiales, mecánica de suelos y rocas) y de la hidráulica, hidrología e hidrogeología. Utilizan modelos matemáticos y para su resolución se emplean técnicas numéricas como los elementos finitos y las diferencias finitas, entre otras. Se pueden aplicar al análisis de presas nuevas y existentes.

Métodos estadísticos: están basados en el proceso de los datos disponibles de comportamiento de la presa mediante modelos matemáticos estadísticos. Su uso está restringido a presas existentes de las que se disponga de un número suficiente de registros procedentes de la auscultación.

Métodos adaptativos: están basados en técnicas de inteligencia artificial. Las dos familias de modelos principales son los sistemas expertos y las redes neuronales. Resuelven problemas mediante técnicas de aprendizaje a partir de ejemplos previos similares. Su empleo en ingeniería civil está poco extendido.

Métodos probabilísticos: introducen la incertidumbre en la formulación de los problemas para obtener la probabilidad de que un sistema no cumpla los requisitos de diseño. Utilizan técnicas de fiabilidad estructural, de estimación de probabilidades y de análisis de riesgos. Se pueden aplicar al análisis de presas nuevas y existentes.

2.2 Métodos clásicos

Si consideramos las distintas variables que intervienen en un problema dado (variables geométricas, de características de los materiales, de acciones, etc.), como un vector de un espacio n-dimensional (X_1, X_2, \dots, X_n) , y definimos una función de resistencia $r(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que favorece la seguridad y una función de sollicitación $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que favorece el fallo, se puede definir una función adimensional $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a partir de las anteriores de modo que:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{r(x_1, x_2, \dots, x_n)}{s(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (1)$$

Un determinado punto del espacio n-dimensional definido está en la región segura si se verifica la condición:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) > 1 \quad (2)$$

Por otro lado, un punto de este espacio queda en la región de fallo si:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1 \quad (3)$$

La frontera entre estas dos regiones, o estado límite, corresponde a la situación definida por el hiperplano n-dimensional:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \quad (4)$$

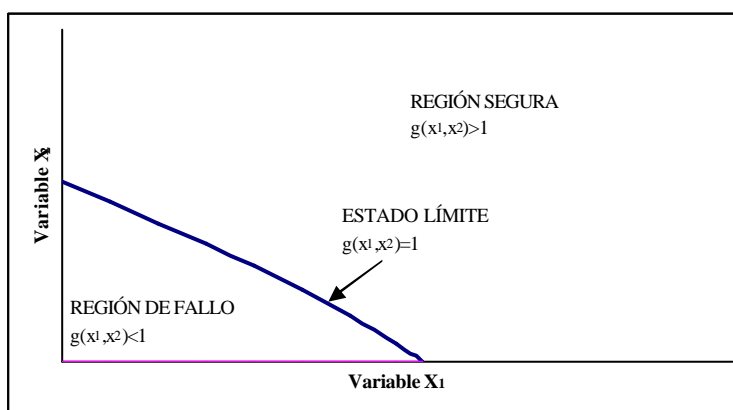


Figura 1: Región segura, de fallo y estado límite para un caso bidimensional.

Se define el coeficiente de seguridad global como una magnitud F ($F > 1$), tal que:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) - F > 0 \quad (5)$$

De forma más habitual se utiliza la notación:

$$\frac{r(x_1, x_2, \dots, x_n)}{s(x_1, x_2, \dots, x_n)} > F \quad (6)$$

La utilización de esta metodología supone adoptar valores fijos para las variables consideradas (X_1, X_2, \dots, X_n) , que se denominan valores representativos.

El problema descrito corresponde al concepto de coeficiente global de seguridad. Una formulación alternativa de plantear el problema corresponde al empleo de coeficientes parciales de seguridad. En esta metodología se introducen unos coeficientes de seguridad que se asocian a algunas de las variables de cálculo. Su uso está extendido dentro del campo de las estructuras de hormigón armado y de las estructuras metálicas.

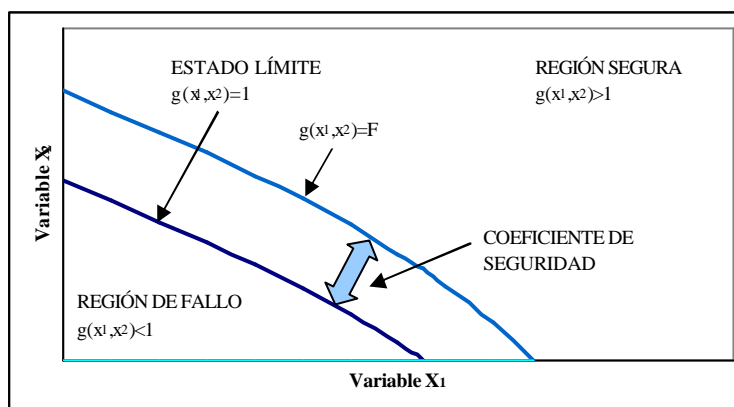


Figura 2: Incremento del margen de seguridad mediante el coeficiente de seguridad.

Se definen unos coeficientes γ_i ($\gamma_i < 1$) que se asocian a las resistencias, R_i , y unos coeficientes λ_j ($\lambda_j > 1$) que se asocian a las solicitaciones, S_j , de modo que la ecuación de comprobación de la seguridad (2.6) se plantea del siguiente modo:

$$\sum_i \gamma_i R_i > \sum_j \lambda_j S_j \quad (7)$$

Esta metodología permite ponderar las variables que intervienen de diversa forma, introduciendo correcciones en función de la incertidumbre asociada a los valores representativos de las variables. Los coeficientes asociados a las resistencias suponen una minoración de las mismas, mientras que los coeficientes asociados a las solicitaciones suponen una mayoración con respecto a los valores representativos.

2.3 Nuevos métodos de evaluación de la seguridad: el Análisis de Riesgos

Recientemente han surgido metodologías probabilísticas para tratar de evaluar el grado de seguridad de las presas, como complemento al enfoque determinístico tradicional. Entre estas metodologías probabilísticas se encuentra el denominado “Análisis de Riesgos”, desarrollado a partir de los trabajos llevados a cabo por diferentes universidades e instituciones de Estados Unidos (U.S. Bureau of Reclamation, U.S. Army Corps of Engineers, UTAH State University, FERC), Canadá (BC Hydro) y Australia (University of New South Wales) y Gran Bretaña (Health and Safety Executive), principalmente. El riesgo se estima combinando las probabilidades de ocurrencia de los escenarios de sollicitación, las probabilidades condicionales de rotura, y la magnitud de las consecuencias y sus distribuciones de probabilidad correspondientes. De forma esquemática, también puede representarse el riesgo por su valor esperado:

$$\text{Riesgo} = E [P(\text{eventos sollicitación}) \times P(\text{rotura} | \text{eventos}) \times P(\text{consecuencias})] \quad (8)$$

donde el símbolo “ $|$ ” representa probabilidad condicional. Una vez identificados y seleccionados los eventos de sollicitación, es preciso caracterizarlos en términos de su probabilidad anual de excedencia, definiendo así un dominio de sollicitaciones.

La definición del riesgo dada en (8) implica la evaluación de tres probabilidades: la de los eventos de sollicitación, la probabilidad condicional de rotura y la probabilidad de las consecuencias asociadas. El presente trabajo se ocupa de la segunda de ellas. La probabilidad condicional de rotura expresa, dado un evento de sollicitación de una magnitud determinada, la respuesta de la presa en términos probabilísticos. Existen tres metodologías generales que permiten obtener la respuesta de la presa en términos probabilísticos (véase Fell, Bowles, Anderson y Bell [1], DEFRA [2], ANCOLD [3], USBR [4] y Kottegoda y Rosso [5]): comportamiento histórico, juicio de experto y análisis.

Mediante el análisis del **comportamiento histórico** se deduce la probabilidad de fallo a partir de los datos de fallos registrados respecto de la población mundial de presas. Incluye la

realización de ajustes en función de la edad de la presa y constituye una herramienta muy valiosa en estudios preliminares para establecer órdenes de magnitud.

El **juicio de experto** es la opinión sobre la verosimilitud de un evento emitida por un ingeniero entrenado para ello y en condiciones controladas y específicas. Siempre satisface los axiomas de la probabilidad y habitualmente incluye los descriptores verbales de la probabilidad.

El **análisis** obtiene la probabilidad de fallo mediante técnicas estadísticas que incluyen la simulación mediante modelos elaborados a partir de la comprensión detallada del proceso de rotura. Utiliza esquemas lógicos como los árboles de eventos o árboles de fallo. Es el método más preciso y adecuado y, en el mejor de los casos, proporciona una función estadística de densidad de la respuesta de la presa.

Estas metodologías se ven complementadas con otras dos, que si bien no permiten obtener la respuesta de la presa en términos probabilísticos, constituyen una herramienta adicional muy útil a lo largo del proceso. Estas metodologías son el análisis determinista clásico y el juicio ingenieril.

2.4 Métodos probabilísticos. Niveles de análisis.

El objetivo es determinar la probabilidad de fallo definida por:

$$P_f [g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0] = \int_{g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (9)$$

Los métodos para estimar la probabilidad de fallo de un sistema se pueden agrupar en distintos niveles (véase Mínguez [6]): Nivel I, Nivel II y Nivel III. El método de Nivel I es el de los coeficientes de seguridad parciales. No proporciona la probabilidad de fallo, y la incertidumbre se mide mediante factores arbitrarios. Los métodos de Nivel II comprenden los denominados métodos de los momentos de segundo orden. Pueden proporcionar la probabilidad de fallo. Aproxima la función de densidad de probabilidad conjunta $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mediante sus dos primeros momentos (media y desviación típica). En algunos casos, se utiliza también una aproximación para la región de fallo $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Los métodos de Nivel III son los denominados métodos exactos. Proporcionan la probabilidad de fallo y utilizan la función de densidad conjunta global y métodos específicos para poder realizar la integración.

2.5 Métodos probabilísticos de análisis de Nivel II :Método FOSM de Series de Taylor.

Los métodos de Nivel 2 utilizan aproximaciones de la función $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de tipo lineal (es decir, de primer orden, o First Order). Además, en lugar de trabajar con la función de densidad de probabilidad conjunta, utilizan únicamente los dos primeros momentos de la misma (Second Moment). Por ello, estos métodos se denominan como métodos FOSM (First Order Second Moment). El resultado directo típico que se obtiene con estos métodos es el índice de fiabilidad, β , que se define como el número de desviaciones típicas que separan el valor esperado de la función $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, del valor correspondiente al estado límite $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$. Este valor proporciona una medida relativa de la fiabilidad (distancia del valor más probable a la región de fallo), de forma que cuanto mayor sea β , más segura es la estructura, pero no proporciona el valor buscado de la probabilidad de fallo.

$$\beta = \frac{E[g^*] - (g^*)_{\text{fallo}}}{S_{g^*}} = \frac{E[g^*] - 0}{S_{g^*}} = \frac{E[g^*]}{S_{g^*}} \quad (10)$$

Puesto que X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias, $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una variable aleatoria, que tendrá una función de distribución de probabilidad determinada, que normalmente es desconocida. Para poder determinar la probabilidad de fallo es preciso realizar una hipótesis sobre cómo es la función de distribución de $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Realizada esta hipótesis y con los dos primeros momentos de la distribución obtenidos a partir de los dos primeros momentos de las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n , se puede obtener el índice de

fiabilidad y la probabilidad de fallo. Para poder obtener los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad de $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a partir de los dos primeros momentos de las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n es preciso que $g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sea una función lineal:

$$g^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \quad (11)$$

Por tratarse de una aproximación de primer orden, las derivadas de segundo orden se desprecian, por lo que la expresión resultante es la misma tanto si las variables aleatorias son dependientes como si son independientes (sin correlaciones):

$$E[g^*] = g^*(E[X_1], E[X_2], \dots, E[X_n]) \quad (12)$$

Es decir, el valor esperado de g^* se obtiene evaluando la función en el punto del espacio n -dimensional correspondiente a los valores esperados de las distintas variables aleatorias. La varianza de g^* , suponiendo variables dependientes, se obtiene mediante:

$$\text{Var}[g^*] = \sum_i \left(\left(\frac{\partial g^*}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right) + 2 \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial g^*}{\partial X_i} \frac{\partial g^*}{\partial X_j} \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \right) \quad (13)$$

donde $\sigma_{X_i}^2$ es la varianza de la variable aleatoria X_i . En el caso de independencia entre las variables aleatorias, la expresión (13) se reduce a:

$$\text{Var}[g^*] = \sum_i \left(\left(\frac{\partial g^*}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 \right) \quad (14)$$

Si la función g^* es lineal, es posible obtener de forma inmediata las derivadas de primer orden. En el caso de que sea no lineal, las derivadas de primer orden se aproximan utilizando el desarrollo en serie de Taylor de primer orden para g^* alrededor del valor medio. Para ello, aunque lo normal es evaluar la función g^* en dos puntos próximos al valor medio, uno a cada lado, se utilizan dos puntos más lejanos del valor medio, que son los puntos situados a una distancia de una desviación típica del valor medio, uno a cada lado. La justificación de esta forma de proceder es que, de este modo, en el caso de ser g^* no lineal, se captura parte del comportamiento no lineal, de forma aproximada. Así pues:

$$\frac{\partial g^*}{\partial X_i} \approx \frac{g^*(E[X_i] + s_{X_i}) - g^*(E[X_i] - s_{X_i})}{(X_i + s_{X_i}) - (X_i - s_{X_i})} = \frac{g^*(E[X_i] + s_{X_i}) - g^*(E[X_i] - s_{X_i})}{2s_{X_i}} \quad (15)$$

y el cuadrado de la derivada de primer orden se puede aproximar por:

$$\left(\frac{\partial g^*}{\partial X_i} \right)^2 \approx \frac{1}{s_{X_i}^2} \left(\frac{g^*(E[X_i] + s_{X_i}) - g^*(E[X_i] - s_{X_i})}{2} \right)^2 \quad (16)$$

sustituyendo (16) en (14) se obtiene:

$$\text{Var}[g^*] = \sum_i \left(\left(\frac{g^*(E[X_i] + s_{X_i}) - g^*(E[X_i] - s_{X_i})}{2} \right)^2 \right) \quad (17)$$

Nótese que con este método, es preciso realizar $2n+1$ evaluaciones de la función g^* , siendo n el número de variables aleatorias consideradas.

2.6 Métodos probabilísticos de análisis de Nivel II: Método de Estimación Puntual.

El método de estimación puntual aproxima los dos primeros momentos de g^* mediante la discretización de las funciones de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n . Esta discretización se realiza mediante unos pocos puntos para cada una de ellas (dos, a lo sumo tres puntos), donde se concentra la probabilidad, de modo que la suma de las probabilidades concentradas en los puntos es igual a la unidad para cada variable (véase Rosenblueth [7] y Harr [8]). La formulación general del método aproxima hasta el tercer momento de las distribuciones, lo que permite el análisis con variables aleatorias asimétricas. También admite el tratamiento de variables aleatorias correlacionadas. A diferencia del método de las series de Taylor, no es preciso evaluar las derivadas parciales de la función g^* . Un inconveniente del método es que precisa evaluar la función g^* 2^n veces, siendo n el número de variables aleatorias consideradas. Si n es grande, la aplicación del método requiere un considerable esfuerzo computacional, sobre todo si la evaluación de g^* no es inmediata.

El método discretiza la función de densidad de probabilidad continua de la variable aleatoria X_i en dos puntos, x_{i+} y x_{i-} , donde se concentra la masa de probabilidad, P_{i+} y P_{i-} . Los puntos se sitúan a cada lado de la media, μ_{X_i} , a una distancia de la misma de d_{i+} y d_{i-} veces la desviación típica, σ_{X_i} , respectivamente.

$$\begin{aligned} P_{i+} + P_{i-} &= 1 \\ x_{i+} &= \mu_{X_i} + d_{i+} \cdot \sigma_{X_i} \\ x_{i-} &= \mu_{X_i} + d_{i-} \cdot \sigma_{X_i} \end{aligned} \quad (18)$$

Los coeficientes d_{i+} y d_{i-} se obtienen a partir del coeficiente de asimetría, γ_i , de la variable aleatoria X_i :

$$\begin{aligned} d_{i+} &= \frac{\gamma_i}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_i}{2}\right)^2} \\ d_{i-} &= d_{i+} - \gamma_i \end{aligned} \quad (19)$$

Las probabilidades asignadas a cada punto se obtienen mediante:

$$\begin{aligned} P_{i+} &= \frac{d_{i-}}{d_{i+} + d_{i-}} \\ P_{i-} &= 1 - P_{i+} \end{aligned} \quad (20)$$

Se han de obtener 2^n valores de probabilidades, obtenidas por combinación de cada una de las probabilidades puntuales de cada variable con las de las restantes. Estas probabilidades se designan como $P_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)}$, donde δ_i es el indicador del signo (+ ó -). Los valores de las probabilidades se obtienen como:

$$P_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} = \prod_{i=1}^n P_{i, \delta_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n d_i d_j a_{ij} \right) \quad (21)$$

donde los coeficientes a_{ij} se obtienen mediante:

$$a_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2^n} \sqrt{\prod_{i=1}^n \left(1 + \left(\frac{\gamma_i}{2}\right)^2 \right)} \quad (22)$$

siendo ρ_{ij} el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X_i y X_j . Es preciso evaluar la función g^* un total de 2^n veces, correspondientes a las 2^n combinaciones de puntos donde se ha calculado la probabilidad $P_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)}$, obteniendo $g^*_{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)}$. Una vez realizado esto, el momento de orden m de la distribución de probabilidad de g^* se estima mediante:

$$E[g^{*m}] \approx \sum P_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} g^{*m}_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} \quad (23)$$

De modo que para el primer momento se obtiene:

$$E[g^*] = \sum P_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} g^*_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} \quad (24)$$

y el momento de segundo orden:

$$E[g^{*2}] = \sum P_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} g^{*2}_{(d_1, d_2, \dots, d_n)} \quad (25)$$

La varianza de g^* se obtiene mediante:

$$\text{Var}[g^*] = E[(g^* - \mu_{g^*})^2] = E[g^{*2}] - \mu_{g^*}^2 \quad (26)$$

De este modo se puede estimar la media y la varianza de la distribución de probabilidad de g^* , pero, al igual que con el método anterior, la forma de la distribución es desconocida. Para poder obtener una medida de la probabilidad de fallo es preciso realizar de nuevo una hipótesis sobre el tipo de función de probabilidad de g^* . A partir de aquí, el procedimiento es análogo al descrito en el apartado anterior. El método pierde exactitud con no linealidades crecientes de la función g^* , y para la estimación de momentos de orden superior al segundo. No proporciona un criterio sobre la aportación a la varianza de g^* de cada una de las variables aleatorias X_i , por lo que no es adecuado para identificar las variables más significativas en el análisis.

2.7 Métodos probabilísticos de análisis de Nivel II: Método del Elipsoide de Hasofer-Lind.

Uno de los problemas que se plantea al utilizar las metodologías del desarrollo en serie de Taylor y del Point Estimate Method es que los índices de fiabilidad que se obtienen no son invariantes, sino que dependen de cómo se haya definido la función g^* (véase US Army Corps of Engineers [4]). Para evitar este problema, Hasofer y Lind [9] propusieron una definición invariante del índice de fiabilidad.

Sea \mathbf{X} el vector de las variables aleatorias que intervienen (X_1, X_2, \dots, X_n), que se suponen normales, \mathbf{m}_X el vector de las medias, \mathbf{s}_X la matriz de varianzas covarianzas y g^*_X la función de estado, que se supone lineal por ahora. El índice de fiabilidad de Hasofer y Lind es el obtenido al resolver el problema:

$$\beta = \underset{x}{\text{Mínimo}} \sqrt{(x - \mu_X)^T \mathbf{s}_X^{-1} (x - \mu_X)} \quad (27)$$

sujeto a:

$$g^*_X(x) = 0 \quad (28)$$

El punto del espacio n -dimensional que verifica la condición se denomina punto de diseño. El punto de diseño se encuentra sobre el límite de la región de fallo (sobre la superficie n -dimensional de frontera entre la región segura y la región de fallo), y es, de todos los puntos de dicha superficie, el más probable. Es decir, aquel para el que la función de densidad conjunta de todas las variables aleatorias que intervienen f_{X_1, X_2, \dots, X_n} es máxima, de entre todos los que se encuentran en dicha superficie. En el caso de que las variables aleatorias sean independientes, la matriz de varianzas covarianzas es una matriz diagonal, donde los términos de la diagonal son las varianzas de las funciones aleatorias, $\sigma_{X_i}^2$, por lo que el problema definido en (27) y (28) se puede formular como:

$$\beta = \underset{x_i}{\text{Mínimo}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_{x_i}}{s_{x_i}} \right)^2} \quad (29)$$

sujeto a:

$$g_X^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (30)$$

Para aplicar el método de Hasofer y Lind es habitual transformar las variables aleatorias normales correlacionadas (X_1, X_2, \dots, X_n) en variables aleatorias normales independientes estandarizadas, de media nula y varianza la unidad (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) . Para conservar las distancias en ambos espacios la transformación debe ser ortogonal.

Para resolver el problema se pueden utilizar diversos algoritmos (Newton, gradiente conjugado, etc.). Como en los casos anteriores, la probabilidad se obtiene a partir del índice de fiabilidad, haciendo una hipótesis sobre la función de probabilidad de g^* . Si las variables aleatorias son normalmente distribuidas y g^* es una función lineal, entonces g^* se distribuye normalmente.

2.8 Métodos probabilísticos de análisis de Nivel III: simulaciones de Monte Carlo.

Los métodos de nivel III permiten una evaluación más exacta de la probabilidad de fallo, puesto que trabajan con las funciones de densidad de probabilidad completas de las variables aleatorias y no solamente con los dos primeros momentos de las mismas. El problema sigue siendo la evaluación de la integral definida en la ecuación (9). Para calcular el valor de la integral se adoptan dos tipos de métodos. Por un lado están los métodos que utilizan transformaciones especiales de las variables aleatorias y siguen una metodología similar a los métodos FOSM, basada en obtener el índice de fiabilidad β . Entre ellos están los métodos denominados FORM (First Order Reliability Methods) y SORM (Second Order Reliability Methods). El otro gran grupo de métodos de nivel III lo forman aquellos mediante los cuales se intenta evaluar directamente el valor de la integral (9). Entre ellos se encuentran los métodos de integración numérica (regla trapezoidal, regla de Simpson, Gauss-Laguerre, Gauss-Hermite, etc.) y los métodos de simulación (métodos de Monte Carlo).

Puesto que se trata de evaluar una integral cuyo significado es la probabilidad de fallo, con los métodos de simulación lo que se hace es generar N realizaciones de las variables aleatorias (experimentos) mediante técnicas estadísticas, de forma que los valores generados son consistentes con las distribuciones supuestas o conocidas de los mismos y con las posibles correlaciones existentes entre las variables:

$$\hat{x}^{(i)} = \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n \right)_{(i)} ; i = 1, \dots, N \quad (31)$$

La generación de estas realizaciones de las variables aleatorias se acomete mediante técnicas estadísticas como el método de la transformación inversa, el método de la composición, el método de aceptación-rechazo, y otros (véase Rubinstein [10]). Se evalúa la función de estado para cada una de estas realizaciones, obteniendo el número de ocasiones, m , en que se verifica la situación de fallo $g^* \leq 0$. La probabilidad buscada se puede aproximar por:

$$P_{\text{fallo}} \approx \frac{m \left(g^* \left(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n \right) \leq 0 \right)}{N} = \hat{P}_f \quad (32)$$

El método de simulación expuesto constituye el denominado método de Monte Carlo normal ("Hit or Miss Monte Carlo Method"). Estos métodos se denominan exactos porque proporcionan el valor exacto de la probabilidad cuando $N \rightarrow \infty$. Para valores menores de N , lo que

proporciona es una estimación del valor de la integral (9). El estimador de la probabilidad de fallo presenta una media y varianza dadas por:

$$E\left[\hat{P}_f\right] = P_f \quad (33)$$

$$s_{\hat{P}_f}^2 = \frac{1}{N} P_f (1 - P_f)$$

La precisión en la estimación realizada viene dada por desviación típica del estimador, que es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de realizaciones o experimentos. Esto significa que doblar la precisión supone multiplicar por cuatro el número de realizaciones (véase USACE [4]).

Por otro lado, las probabilidades de fallo en ingeniería civil y en ingeniería de presas en particular suelen ser pequeñas, del orden de 1 entre 10000 y menores. Por ello, es preciso realizar un gran número de simulaciones para poder registrar situaciones de fallo (cada realización o experimento es un proceso de Bernouilli, cuya probabilidad de fallo es, precisamente, la P_f que se quiere averiguar).

Es habitual utilizar las técnicas de simulación para realizar inferencias acerca de la función de estado g^* , y, por extensión, del coeficiente de seguridad. En efecto, las N evaluaciones realizadas de g^* constituyen una muestra de dicha variable aleatoria, siendo posible por tanto realizar estimaciones acerca de parámetros importantes que permitan conocer cómo se distribuye g^* en términos probabilísticos (media, varianza, sesgo, etc.). Una vez ajustada o deducida una función de distribución para la función de estado, F_{g^*} , la probabilidad de fallo se obtiene de forma inmediata mediante:

$$P_f = P[g^* \leq 0] = F_{g^*}(0) \quad (34)$$

Una aparente ventaja de esta forma de proceder es que, una vez deducida F_{g^*} , para lo que puede bastar con un valor de N moderado, se conoce completamente el dominio de probabilidad, y se pueden estimar probabilidades muy bajas, situadas en las colas de la distribución. Frente a esta comodidad, la desventaja principal es que la función deducida puede no ser adecuada en la región menos conocida pero más importante a efectos de estimar la probabilidad de fallo, que es precisamente la cola de la distribución, por lo que las estimaciones así realizadas pueden arrojar resultados con errores importantes.

3 MODELO DE CÁLCULO DE EQUILIBRIO LÍMITE

3.1 Descripción

La presa analizada es del tipo gravedad. La cota de coronación es la 322.50 m.s.n.m.; la cota del labio del aliviadero es la 313.00 m.s.n.m.; la cota del cauce es la 265.00 m.s.n.m. y la cota de cimientos es la 243.83 m.s.n.m. Se trata de una presa con perfil triangular de gravedad, con un vertedero central en un perfil Creager. Los paramentos tienen un talud 0,05 aguas arriba y 0,75 aguas abajo, la altura es de 57,50 metros sobre el lecho del río y la altura máxima sobre cimientos es de 78,67 m. La sección analizada es la sección correspondiente al aliviadero.

Como modelo de comportamiento para analizar la presa frente al deslizamiento en el contacto presa-cimiento se utiliza un modelo de sólido rígido, en la aproximación conocida como "Análisis de Equilibrio Límite", que evalúa la estabilidad al deslizamiento mediante el equilibrio entre fuerzas deslizantes y fuerzas resistentes. Se ha elaborado un modelo geométrico de base horizontal simplificando la geometría de la coronación y prescindiendo de las galerías. Este modelo se ha programado en una hoja de cálculo. El modelo simplificado se recoge en la Figura 4 y es el utilizado para realizar los cálculos de la probabilidad de fallo.

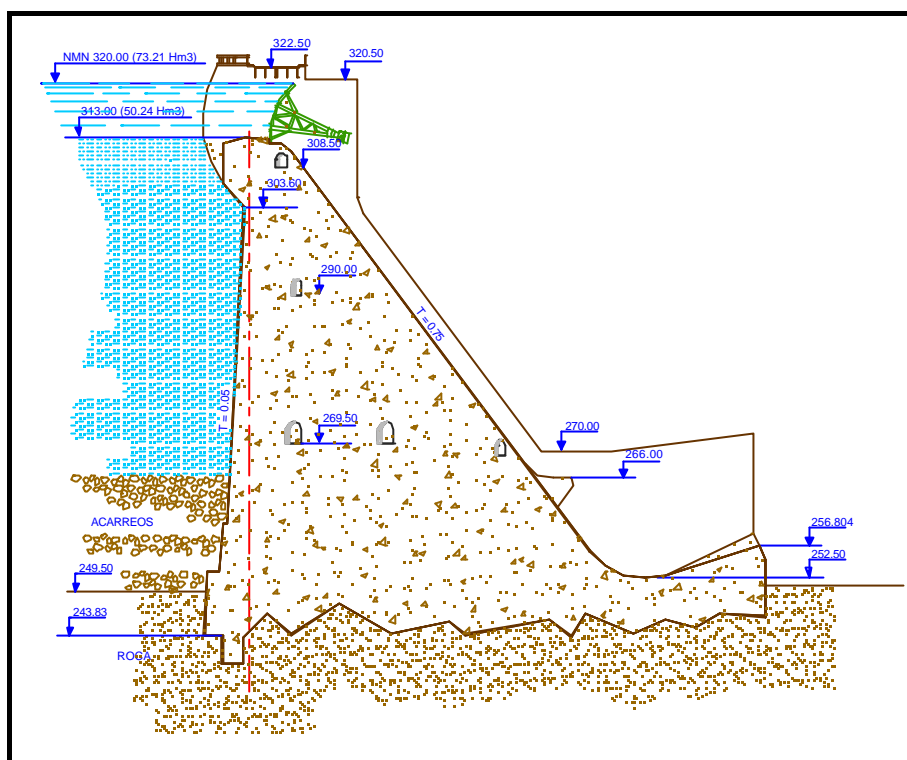


Figura 3: Sección por el aliviadero de la presa analizada.

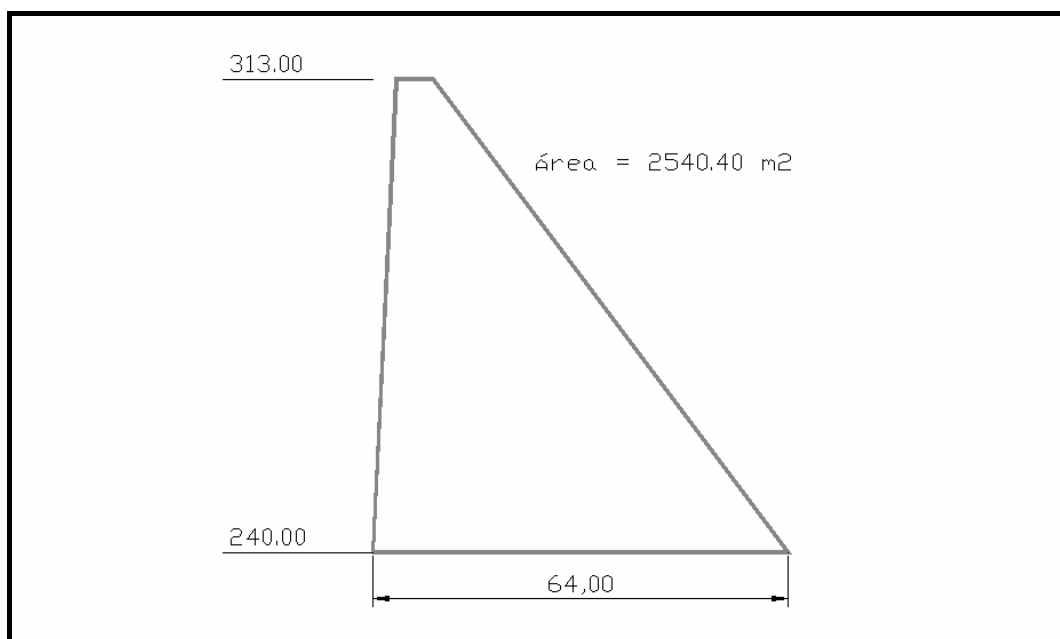


Figura 4: Sección simplificada por el aliviadero de la presa analizada.

3.2 Función de estado, g^* .

La ecuación de estado límite, g^* , se formula como:

$$g^* = \frac{r}{s} - 1 \quad (35)$$

La función de resistencia al deslizamiento, r , se obtiene como:

$$r = (N - U) \tan \phi + B \cdot c \quad (36)$$

donde, N es la suma de las fuerzas verticales que actúan sobre la base de la presa (peso propio, componente vertical de los empujes hidrostáticos y del empuje de los sedimentos), excepto la subpresión; U es la subpresión que actúa sobre la base de la presa, calculada de acuerdo con las distribuciones propuestas por el USACE [11] en función del coeficiente K de ineficiencia de drenes; B es la zona comprimida de la base de la presa; ϕ es el ángulo de rozamiento en el contacto entre presa y terreno y, c es la cohesión en el contacto entre presa y terreno.

Por su parte, la función de sollicitación a deslizamiento, s , se calcula como:

$$s = E_{H1} - E_{H2} + E_{SED} \quad (37)$$

donde, E_{H1} es la componente horizontal del empuje hidrostático actuando aguas arriba; E_{H2} es la componente horizontal del contraempuje hidrostático actuando aguas abajo y E_{SED} es la componente horizontal del empuje debido a los sedimentos.

El modelo elaborado evalúa las tensiones en el plano de contacto presa-cimiento y considera la posible formación de una grieta bajo el pie de aguas arriba de la presa, realizando la hipótesis de distribución lineal de tensiones. El alcance de la grieta se obtiene mediante un proceso de propagación incremental de la zona “despegada”, corrigiendo el valor de la subpresión actuante (máxima en la zona agrietada) y evaluando las tensiones en el plano de contacto en cada incremento de grieta hasta que, o bien se alcanza el equilibrio, o bien la grieta avanza hasta producir la superación de las tensiones de compresión admisibles en el contacto.

3.3 Variables aleatorias consideradas.

Los niveles de embalse y de contraembalse son datos previos al cálculo, que llevan asociada su propia probabilidad de ocurrencia, por lo que los resultados obtenidos son siempre probabilidades condicionales, dado un determinado escenario de niveles. El Nivel Máximo Normal de embalse corresponde a la cota 320 m.s.n.m. y el nivel de coronación corresponde a la cota 322.50 m.s.n.m.

Como variables aleatorias se han considerado el ángulo de rozamiento en el plano de contacto entre presa y terreno, ϕ , la cohesión en dicho plano de contacto, c , el coeficiente de ineficiencia de los drenes, K , y la densidad del hormigón, γ , adoptando el resto de parámetros que intervienen en el cálculo valores fijos. Todas las variables aleatorias se consideran estadísticamente independientes entre sí. Los parámetros principales de las variables aleatorias y sus distribuciones se recogen en la Tabla 1.

TABLA 1.- Variables aleatorias consideradas.

Variable	Unidad	Tipo de distribución	Media	Desviación típica	Valor mínimo	Valor máximo
Ángulo de rozamiento (ϕ)	°	Normal	50	10	30	70
Cohesión (c)	Pa	Lognormal	4×10^5	3×10^5	0	20×10^5
Coefficiente de drenaje (K)		Triangular	0.37	0.22	0.00	1.00
Densidad del hormigón (γ)	kg/m ³	Normal	2350	50	2150	2550

De este modo, la función de estado límite es una función de hasta 4 variables aleatorias:

$$g^*(g, K, \phi, c) = 0 \quad (38)$$

4 RESULTADOS OBTENIDOS

4.1 Métodos de Nivel II

Se ha obtenido la probabilidad de fallo correspondiente a cada nivel de embalse. Se han realizado los cálculos para 2 variables aleatorias (ángulo de fricción y cohesión), para 3 variables aleatorias (ángulo de fricción, cohesión y coeficiente de drenaje) y para 4 variables aleatorias (ángulo de fricción, cohesión, coeficiente de drenaje y densidad del hormigón). Los cálculos se han realizado por tres métodos de Nivel II: FOSM (Serie de Taylor), FOSM (Elipsoide de Hasofer-Lind) y por el Método de Estimación Puntual. En la Tabla 2 se recogen los valores de probabilidades obtenidos por el método FOSM de las series de Taylor y en la Figura 5 su representación gráfica.

TABLA 2.- Método FOSM (Series de Taylor). Probabilidades condicionales de fallo.

Caso	Nivel de embalse	Nivel de contraembalse	Número de variables aleatorias		
	N1 (m.s.n.m.)	N2(m.s.n.m.)	4 (j , c, K, g)	3 (j , c, K)	2 (j , c)
1	268.00	266.00	8.76E-04	8.59E-04	8.59E-04
2	280.00	266.00	1.65E-03	1.62E-03	1.61E-03
3	290.00	266.00	3.20E-03	3.15E-03	3.11E-03
4	300.00	266.00	6.84E-03	6.75E-03	6.57E-03
5	310.00	266.00	1.56E-02	1.54E-02	1.48E-02
6	313.00	266.00	2.01E-02	1.99E-02	1.91E-02
7	315.00	266.00	2.37E-02	2.35E-02	2.25E-02
8	320.00	266.00	3.62E-02	3.58E-02	3.36E-02
9	322.50	266.00	4.52E-02	4.45E-02	4.07E-02
10	324.00	266.00	5.07E-02	5.00E-02	4.59E-02
11	326.00	266.00	5.92E-02	5.84E-02	5.39E-02
12	330.00	266.00	8.05E-02	7.97E-02	7.43E-02
13	331.70	266.00	9.15E-02	9.07E-02	8.48E-02

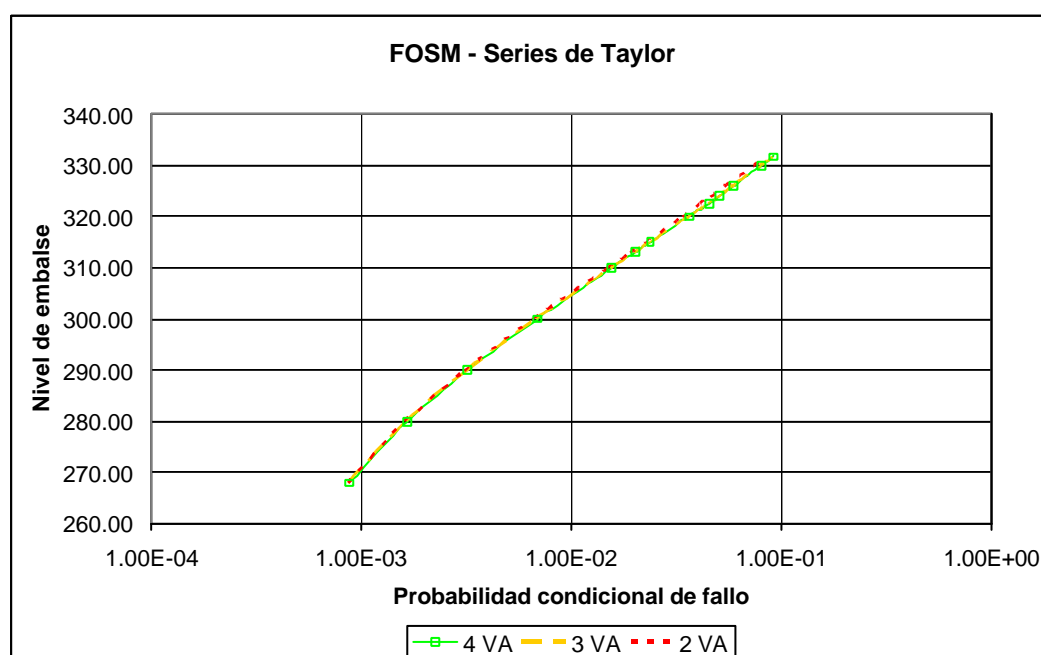


Figura 5: Método FOSM (Series de Taylor). Probabilidades condicionales de fallo.

En la Tabla 3 se recogen los valores de probabilidades obtenidos por el método FOSM del elipsoide de Hasofer-Lind y en la Figura 6 su representación gráfica.

TABLA 3.- Método FOSM (Elipsoide de Hasofer-Lind). Probabilidades condicionales de fallo.

Caso	Nivel de embalse	Nivel de contraembalse	Número de variables aleatorias		
	N1 (m.s.n.m.)	N2(m.s.n.m.)	4 (j , c, K, g)	3 (j , c, K)	2 (j , c)
1	268.00	266.00	0.00	0.00	0.00
2	280.00	266.00	0.00	0.00	0.00
3	290.00	266.00	0.00	0.00	0.00
4	300.00	266.00	0.00	0.00	0.00
5	310.00	266.00	2.59E-03	2.37E-03	0.00
6	313.00	266.00	5.69E-03	5.56E-03	5.09E-03
7	315.00	266.00	8.80E-03	8.62E-03	7.91E-03
8	320.00	266.00	2.12E-02	2.10E-02	1.95E-02
9	322.50	266.00	2.88E-02	2.88E-02	2.72E-02
10	324.00	266.00	3.42E-02	3.39E-02	3.22E-02
11	326.00	266.00	4.13E-02	4.10E-02	3.53E-02
12	330.00	266.00	5.51E-02	5.49E-02	5.65E-02
13	331.70	266.00	6.03E-02	6.01E-02	6.59E-02

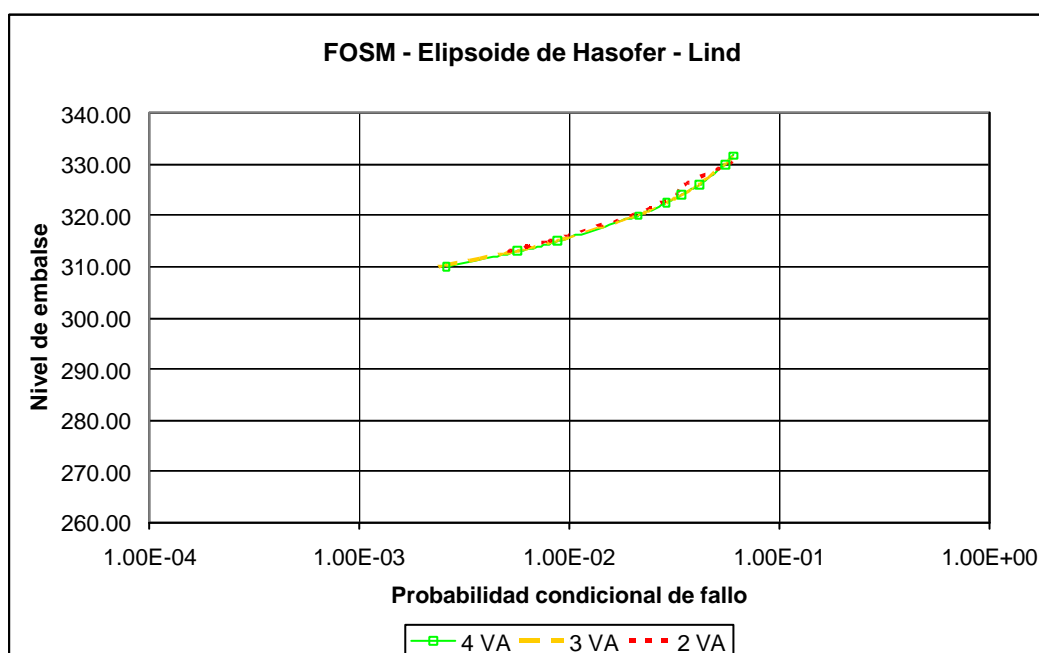


Figura 6: Método FOSM (Elipsoide de Hasofer-Lind). Probabilidades condicionales de fallo.

En la Tabla 4 se recogen los valores de probabilidades obtenidos por el Método de Estimación Puntual y en la Figura 7 su representación gráfica. Como se puede observar, las gráficas coincidentes indican que sólo dos variables aleatorias, ángulo de rozamiento y cohesión, son significativas, puesto que la variación en la probabilidad de fallo obtenida que resulta de la consideración de las otras variables en el análisis es despreciable. En la Tabla 5 se recogen los valores de probabilidades obtenidos para el caso de 2 variables aleatorias por los distintos métodos de Nivel II y en la Figura 8 su representación gráfica.

TABLA 4.- Método de Estimación Puntual. Probabilidades condicionales de fallo.

Caso	Nivel de embalse	Nivel de contraembalse	Número de variables aleatorias		
	N1 (m.s.n.m.)	N2(m.s.n.m.)	4 (j , c, K, g)	3 (j , c, K)	2 (j , c)
1	268.00	266.00	5.64E-04	5.50E-04	5.50E-04
2	280.00	266.00	1.10E-03	1.07E-03	1.07E-03
3	290.00	266.00	2.20E-03	2.15E-03	2.12E-03
4	300.00	266.00	4.89E-03	4.80E-03	4.63E-03
5	310.00	266.00	1.16E-02	1.15E-02	1.09E-02
6	313.00	266.00	1.52E-02	1.50E-02	1.42E-02
7	315.00	266.00	1.81E-02	1.79E-02	1.69E-02
8	320.00	266.00	2.86E-02	2.81E-02	2.57E-02
9	322.50	266.00	3.55E-02	3.49E-02	3.11E-02
10	324.00	266.00	4.00E-02	3.92E-02	3.51E-02
11	326.00	266.00	4.67E-02	4.59E-02	4.13E-02
12	330.00	266.00	6.40E-02	6.31E-02	5.74E-02
13	331.70	266.00	7.31E-02	7.21E-02	6.59E-02

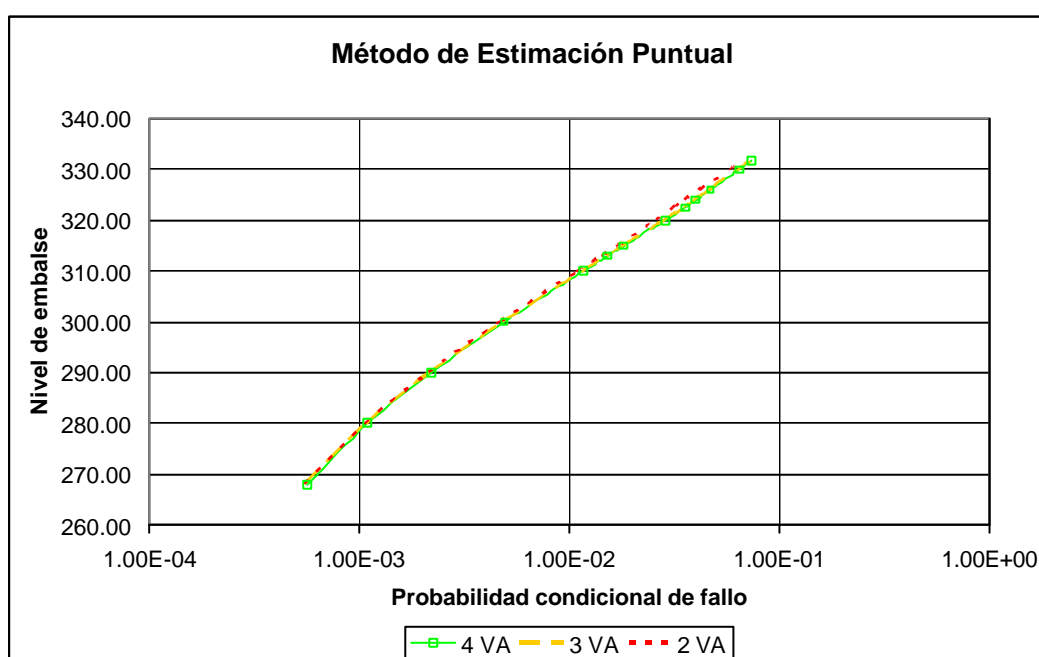


Figura 7: Método de Estimación Puntual. Probabilidades condicionales de fallo.

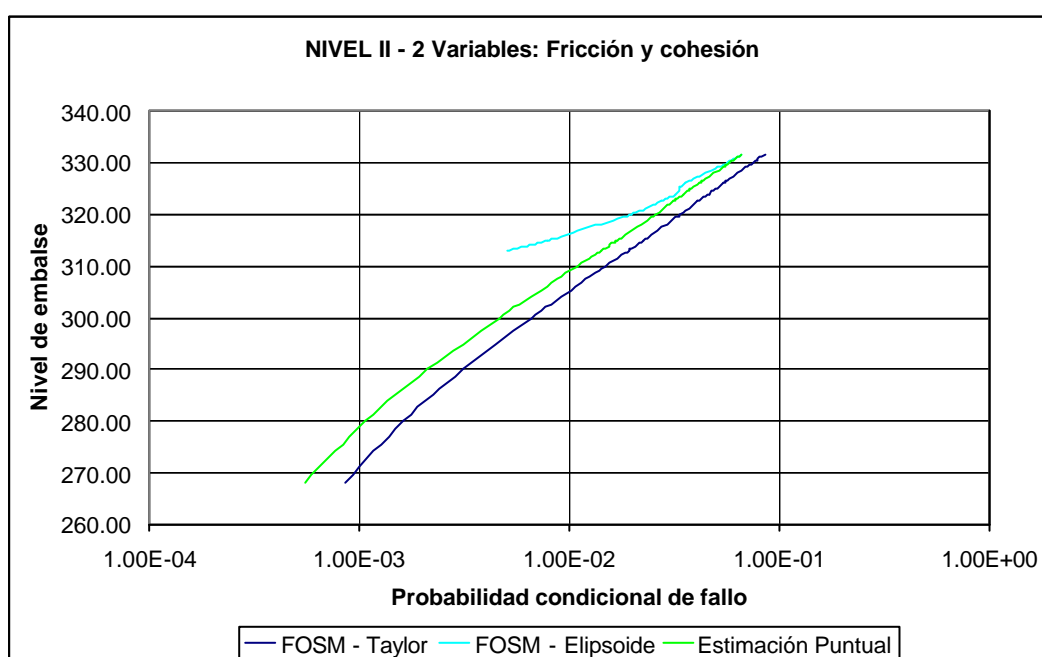
4.2 Métodos de Nivel III

Los cálculos de Nivel III se han realizado mediante la herramienta numérica @RISK implementada en hoja de cálculo. Para cada nivel de embalse se han generado 1.00×10^6 conjuntos de valores de las variables aleatorias, coherentes con las funciones de probabilidad supuestas para las mismas, comprobándose en cada caso si se alcanza el equilibrio y estableciendo un conteo de fallos. En la Tabla 6 se recogen los valores de probabilidades obtenidos para el caso de 2, 3 y 4 variables aleatorias y en la Figura 9 su representación gráfica.

Como se puede observar a la vista de la Figura 9 los valores de las probabilidades son muy similares independientemente del número de variables aleatorias consideradas, siendo de nuevo las más relevantes el ángulo de rozamiento y la cohesión.

TABLA 5.- Nivel II para 2 Variables aleatorias. Probabilidades condicionales de fallo.

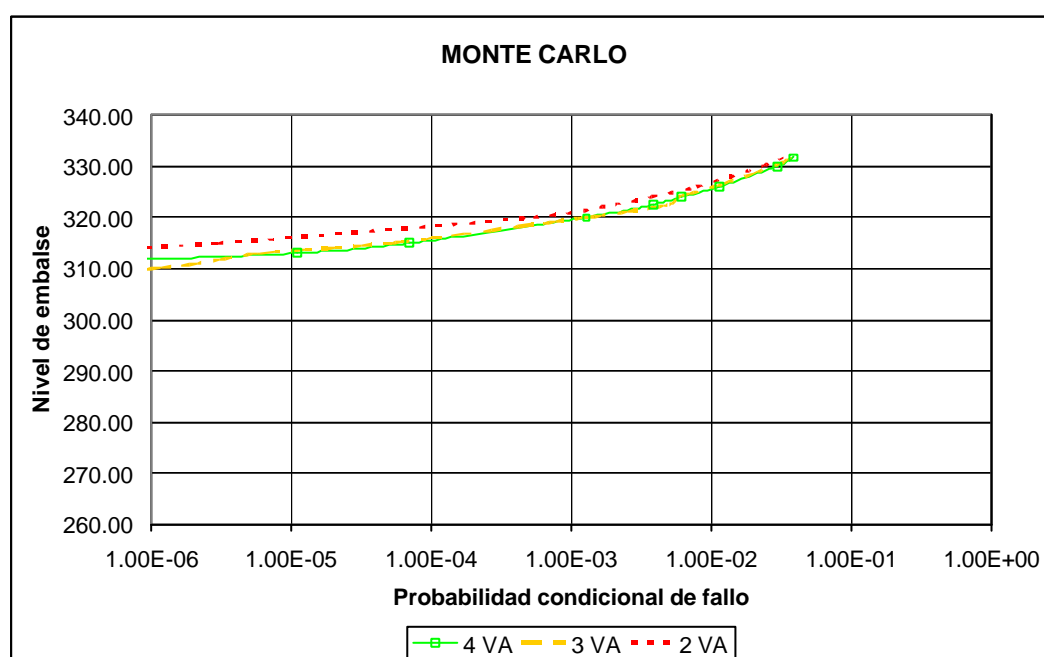
Caso	Nivel de embalse	Nivel de contraembalse	Método de Nivel II		
	N1 (m.s.n.m.)	N2(m.s.n.m.)	FOSM Taylor	FOSM Elipsoide	Estimación Puntual
1	268.00	266.00	8.59E-04	0.00	5.50E-04
2	280.00	266.00	1.61E-03	0.00	1.07E-03
3	290.00	266.00	3.11E-03	0.00	2.12E-03
4	300.00	266.00	6.57E-03	0.00	4.63E-03
5	310.00	266.00	1.48E-02	0.00	1.09E-02
6	313.00	266.00	1.91E-02	5.09E-03	1.42E-02
7	315.00	266.00	2.25E-02	7.91E-03	1.69E-02
8	320.00	266.00	3.36E-02	1.95E-02	2.57E-02
9	322.50	266.00	4.07E-02	2.72E-02	3.11E-02
10	324.00	266.00	4.59E-02	3.22E-02	3.51E-02
11	326.00	266.00	5.39E-02	3.53E-02	4.13E-02
12	330.00	266.00	7.43E-02	5.65E-02	5.74E-02
13	331.70	266.00	8.48E-02	6.59E-02	6.59E-02

**Figura 8: Nivel II para 2 variables aleatorias . Probabilidades condicionales de fallo.**

Para poder realizar la comparación entre los resultados obtenidos con los distintos métodos se ha elaborado la Figura 10 que resume todos los resultados obtenidos para el caso de considerar solamente las dos variables aleatorias más relevantes. Como se puede observar en la Figura 10, los métodos de Nivel II proporcionan estimaciones de la probabilidad de fallo por exceso de forma significativa, sobre todo en la zona de bajos niveles de embalse. Conforme los niveles son más altos, las probabilidades obtenidas tienden a aproximarse. Los mejores resultados con los métodos de Nivel II corresponden al Método del Elipsoide de Hasofer-Lind, mientras que el Método de Taylor ofrece la peor estimación. La fuerte desviación con respecto a los resultados obtenidos con el Método de Monte Carlo se explica principalmente por el hecho de que el problema real se aparta de forma importante de las hipótesis que sustentan la aplicación de los métodos de Nivel II: linealidad de la función de estado y normalidad de las distribuciones aleatorias de las variables consideradas.

TABLA 6.- Método de Monte Carlo. Probabilidades condicionales de fallo.

Caso	Nivel de embalse	Nivel de contraembalse	Número de variables aleatorias		
	N1 (m.s.n.m.)	N2(m.s.n.m.)	4 (j , c, K, g)	3 (j , c, K)	2 (j , c)
1	268.00	266.00	0.00	0.00	0.00
2	280.00	266.00	0.00	0.00	0.00
3	290.00	266.00	0.00	0.00	0.00
4	300.00	266.00	0.00	0.00	0.00
5	310.00	266.00	<1.00E-06	1.00E-06	0.00
6	313.00	266.00	1.10E-05	6.00E-06	<1.00E-06
7	315.00	266.00	7.00E-05	5.10E-05	3.00E-06
8	320.00	266.00	1.27E-03	1.28E-03	5.30E-04
9	322.50	266.00	3.84E-03	4.96E-03	2.03E-03
10	324.00	266.00	6.09E-03	5.83E-03	3.73E-03
11	326.00	266.00	1.13E-02	1.05E-02	7.81E-03
12	330.00	266.00	2.93E-02	2.76E-02	2.31E-02
13	331.70	266.00	3.87E-02	3.74E-02	3.27E-02


Figura 9: Método de Monte Carlo. Probabilidades condicionales de fallo.

5 CONCLUSIONES

Se ha obtenido la probabilidad condicional de fallo a deslizamiento de una presa de hormigón utilizando métodos probabilísticos de Nivel II y de Nivel III. Los métodos de Nivel II aportan estimaciones más imprecisas, sobreestimando la probabilidad de fallo. La imprecisión crece en la medida en que las distribuciones empleadas no son normales y la función de estado evaluada es no lineal. Los métodos de nivel III proporcionan resultados más ajustados a la realidad, pero precisan de numerosas simulaciones si los niveles de probabilidad estimados son bajos.

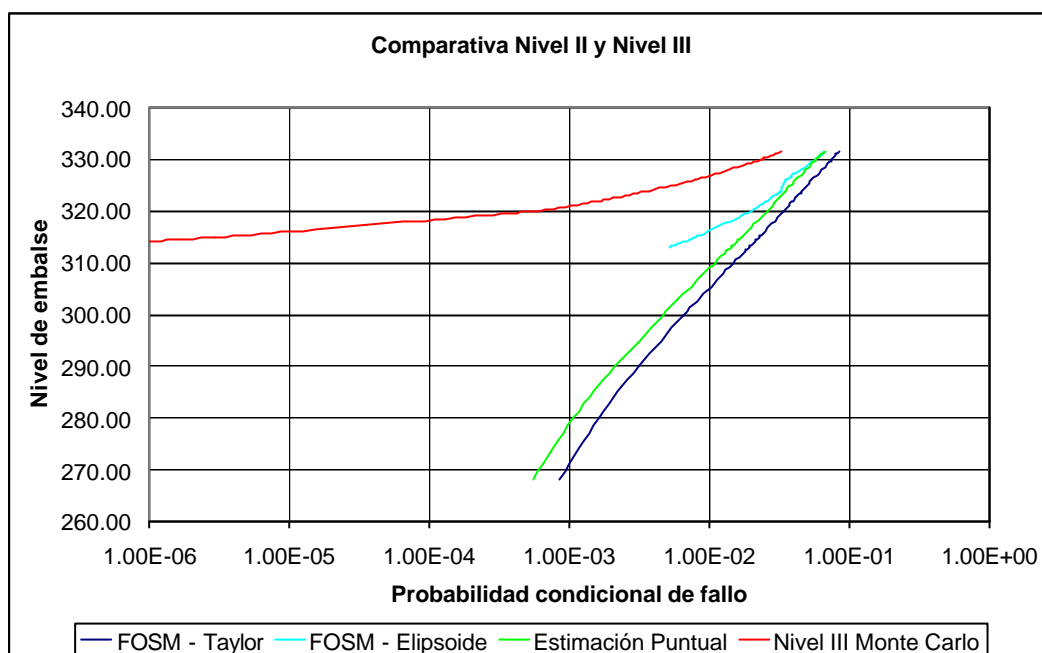


Figura 10: Comparativa de Nivel II y Nivel III. Probabilidades condicionales de fallo.

Como tareas pendientes para el estudio de la repercusión del uso de un método u otro sobre la estimación de riesgos globales en una presa particular, cabría llevar a cabo un análisis de sensibilidad sobre el modelo completo realizado por G. MEMBRILLERA [12] para la estructura utilizada como caso de estudio.

6 AGRADECIMIENTOS

Esta contribución se ha desarrollado en el marco del proyecto "Aplicación del análisis de riesgos a los programas de conservación, mantenimiento, rehabilitación y gestión de la seguridad de presas y embalses" BIA2006-08948, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y los fondos FEDER (70 %).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FELL, R.; BOWLES, D.S.; ANDERSON, L.R.; y BELL, G. (2000). The status of methods for estimation of the probability of failure of dams for use in quantitative risk assessment. ICOLD Q76 R 15. Vol. 1, 213-236. Correction in Volumen 5 page 73.
- [2] DEFRA (2002). Reservoir safety floods and reservoir safety integration. Secretary of State for the Environment, Transport and the Regions. Reino Unido.
- [3] AUSTRALIAN NATIONAL COMITEE ON LARGE DAMS (2003). Guidelines on risk assessment.
- [4] BUREAU OF RECLAMATION (2003). Dam safety risk analysis methodology. Version 3.3.1. U.S. Department of the Interior.
- [5] KOTTEGODA, N.T.; ROSSO, R. (1997) Statistics, probability and reliability for civil and environmental engineers. McGraw-Hill.
- [6] MÍNGUEZ, R. (2003). Seguridad, fiabilidad y análisis de sensibilidad en obras de ingeniería civil mediante técnicas de optimización por descomposición. Aplicaciones. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria.
- [7] ROSENBLUETH, E. (1975). Point estimates for probability moments. Proceedings of the National Academy of Science, USA, 72 (10)
- [8] HARR, M.E. (1987). Reliability-based design in civil engineering. John Wiley and Sons, New York, USA.

- [9] HASOFER, A.M.; LIND, N.C. (1974). Exact and invariant second moment code format. *Journal of Engineering Mechanics*. 100, EM1, 111-121
- [10] RUBINSTEIN, R.Y. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons.
- [11] US ARMY CORPS OF ENGINEERS (2000). Evaluation and comparison of stability analysis and uplift criteria for concrete gravity dams by three federal agencies. ERDC/ITL TR-00-1. Washington, DC.
- [12] G. MEMBRILLERA, M. Contribución a la aplicación del análisis y declaración de riesgos en presas españolas, incluyendo priorización de inversiones. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2007.